I. Nombres complexes

1 Corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

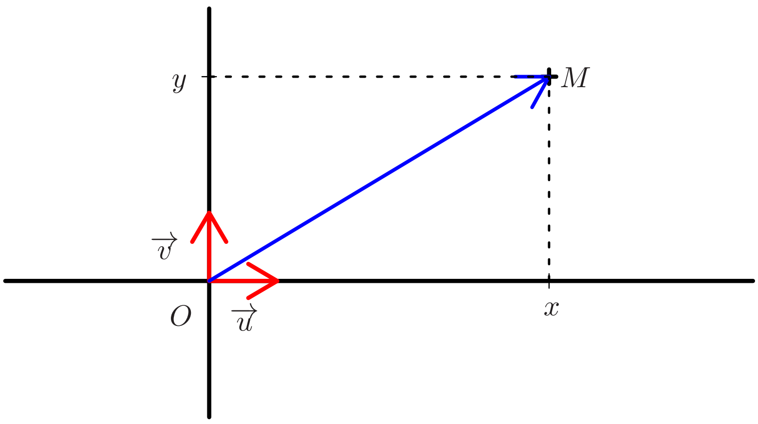
Théorème 1. *Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ des* **nombres complexes** *qui possède les propriétés suivantes :*
- *$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.*
- *$\mathbb{C}$ contient un nombre noté i tel que $i^2 = -1$.*
- *tout nombre complexe z admet une unique écriture sous la forme $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, cette écriture est appelée* **forme algébrique** *du nombre z, le réel x est la* **partie réelle** *du nombre z notée $\mathcal{R}e(z)$ et le réel y est la* **partie imaginaire** *du nombre z notée $\mathcal{I}m(z)$. Si $y = 0$ le nombre z est dit* **réel** *et si $x = 0$ le nombre z est dit* **imaginaire pur**.

Démonstration. Non exigible. □

Exercice 1. *Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = 3 - (2 + i)(1 - 3i)$.*

Définition 1. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ on représente le nombre complexe $z = x + iy$ par :*
- *Le point $M(x; y)$.*
- *Le vecteur $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*

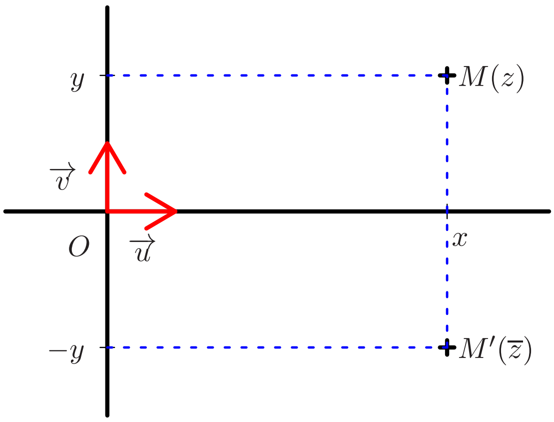
Le plan est alors appelé **plan complexe**, *l'axe des abscisses est appelé* **axe des réels** *et l'axe des ordonnées* **axe des imaginaires purs**, *le nombre complexe z est appelé* **affixe** *du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.*



Exercice 2. *Représenter dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = -1 - 4i$, $z_C = -3i$ et $z_D = -7$. Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

Définition 2. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on appelle* **nombre complexe conjugué** *de z le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.*

Propriété 1. *Soit z un nombre complexe, les points M et M' du plan complexe d'affixes respectives z et $\overline{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.*



Démonstration. Exigible. □

Exercice 3. *Calculer la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{3-i}{1+2i}$. (on pourra multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur)*

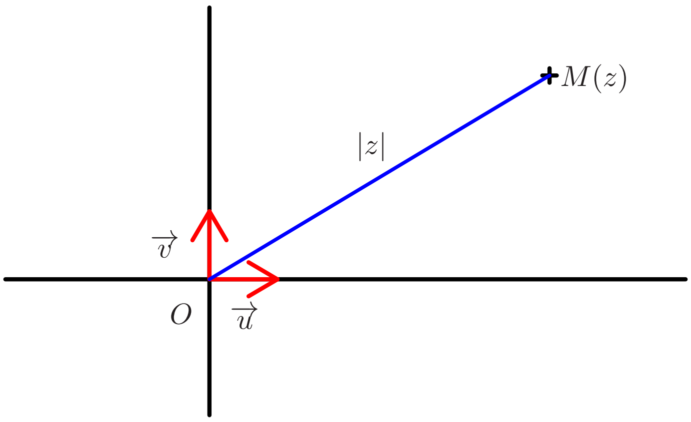
Propriété 2. *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :*

- $\boxed{\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}}$
- $\boxed{\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}}$
- $\boxed{\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}}$
- *pour* $z_2 \neq 0$, $\boxed{\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}$

Démonstration. Exigible. □

Définition 3. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, on appelle* **module** *de z le nombre réel $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Propriété 3. *Soit z un nombre complexe et M son point image dans le plan complexe alors $OM = |z|$.*



Démonstration. Exigible. □

Propriété 4. *Soient* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *on a :*

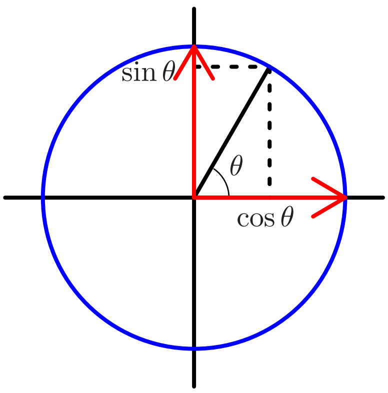
- $\boxed{z\overline{z} = |z|^2}$
- $\boxed{|\overline{z}| = |z|}$
- $\boxed{|-z| = |z|}$
- $\boxed{|z| = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad z = 0}$
- $\boxed{|z_1 z_2| = |z_1||z_2|}$
- *pour* $z \neq 0$, $\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}}$
- *pour* $z_2 \neq 0$, $\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$
- $\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$ *(inégalité triangulaire)*

Démonstration. Exigible - Pour la preuve de l'inégalité triangulaire, on remarque que $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathcal{R}e(z_1\overline{z_2})$. □

2 Écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul

2.1 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Propriété 5. *Tout nombre complexe de module* 1 *peut s'écrire sous la forme* $\cos\theta + i\sin\theta$ *avec* $\theta \in \mathbb{R}$, θ *étant défini de manière unique à* 2π *près.*



Démonstration. Exigible - On utilise les formules d'addition qui seront démontrées dans le chapitre II. □

Propriété 6. *On note* $z_\theta = \cos\theta + i\sin\theta$ *pour* $\theta \in \mathbb{R}$, *alors* $\overline{z_\theta} = z_{-\theta} = \dfrac{1}{z_\theta}$ *et pour tous* α *et* β *appartenant à* $\mathbb{R}$ *on a* $z_\alpha z_\beta = z_{\alpha+\beta}$.

Démonstration. Exigible. □

Définition 4. *Par analogie avec l'exponentielle réelle, on note désormais* $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ *pour* $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. *Calculer* $e^{i\pi}$ *(formule d'Euler), calculer* $e^{in\pi}$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$.

Propriété 7. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors :*

- $\boxed{\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}}$ $\boxed{\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$ *(formules d'Euler)*
- $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$ *(formule de Moivre)*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 5. *Montrer en utilisant les formules d'Euler que* $(\cos x)^2 = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$.

Exercice 6. *Montrer en utilisant la formule de Moivre que* $\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$ *et* $\sin(2x) = 2\cos x \sin x$.

Propriété 8. *formulaire de trigonométrie*

- $\boxed{\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b}$
  $\boxed{\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b}$
  $\boxed{\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}}$
  (ces formules se retrouvent à partir de l'égalité $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$ *)*

- $\boxed{\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1 = 1 - 2(\sin x)^2}$
  $\boxed{\sin(2x) = 2\sin x \cos x}$
  $\boxed{\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-(\tan x)^2}}$
  (ces formules se déduisent des précédentes)

- $\boxed{\cos x = \dfrac{1-\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}{1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}}$
  $\boxed{\sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}}$
  $\boxed{\tan x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2}}$
  (ces formules se déduisent des précédentes en remarquant que $\dfrac{1}{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2} = 1 + \left(\tan\dfrac{x}{2}\right)^2$ *)*

Démonstration. Exigible. □

2.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

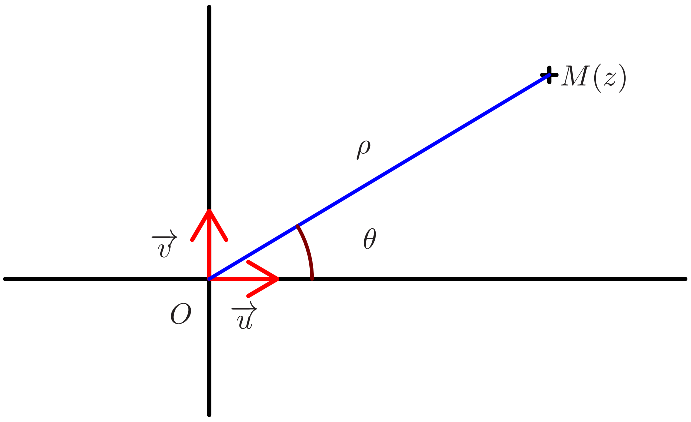
Propriété 9. *Tout nombre complexe $z = x + iy$ non nul peut s'écrire de manière unique sous la* **forme trigonométrique** $z = \rho e^{i\theta}$ *avec ρ un réel strictement positif et θ un réel défini à 2π près. De plus on a :*

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Le réel θ est appelé **argument** *du nombre complexe z et noté* $\arg(z)$.

Démonstration. Exigible - On considère le nombre complexe $\dfrac{z}{|z|}$. □

Propriété 10. *Soit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ un nombre complexe et M son point image dans le plan complexe alors le couple (ρ, θ) représente les coordonnées polaires du point M.*



Exercice 7. *On considère le nombre complexe $z = 1 + i$. Écrire z sous forme trigonométrique, en déduire la forme algébrique de z^{100}.*

Exercice 8. *On considère les nombres complexes $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique, en déduire les modules et arguments de $z_1 \times z_2$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$.*

Propriété 11. *Soient z, z_1 et z_2 trois nombres complexes non nuls, alors :*

- $\boxed{\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(-z) = \arg(z) + \pi \ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) \ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \ [2\pi]}$
- $\boxed{\arg(z^n) = n \times \arg(z) \ [2\pi] \quad , \quad n \in \mathbb{Z}}$

Démonstration. Exigible - On utilise la forme trigonométrique. □

2.3 Racines n-ièmes de l'unité

Propriété 12. *L'équation $z^n = 1$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ admet n solutions appelées* **racines n-ièmes de l'unité** *et s'exprimant sous la forme $\boxed{z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Démonstration. Exigible - On utilise la forme trigonométrique. □

Exercice 9. *Déterminer sous forme algébrique les racines cubiques de l'unité et les représenter dans le plan complexe.*

Propriété 13. *L'équation $z^n = a$ avec $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ admet n solutions s'exprimant sous la forme $\boxed{z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha + 2k\pi}{n}}}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ où $r = |a|$ et $\alpha = \arg(a)$.*

Démonstration. Exigible - On utilise la forme trigonométrique. □

Exercice 10. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8i$.*

2.4 Exponentielle complexe

Définition 5. *On appelle* **exponentielle complexe** *d'un nombre complexe* $z = x + iy$ *avec* x *et* y *réels* $\boxed{e^z = e^x e^{iy}}$.

Remarque 1. *Cette définition est compatible avec l'exponentielle d'un réel et l'exponentielle d'un nombre imaginaire pur et conserve de nombreuses propriétés.*

Propriété 14. *Soit* z, z_1 *et* z_2 *des nombres complexes et* n *un entier relatif, alors :*
- $\boxed{e^z \neq 0}$
- $\boxed{e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}}$
- $\boxed{e^{\overline{z}} = \overline{e^z}}$
- $\boxed{e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}}$
- $\boxed{e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}}$
- $\boxed{(e^z)^n = e^{nz}}$

Démonstration. Exigible. □

Exercice 11. *Déterminer la forme algébrique de* $e^{i-\sqrt{3}}$.

3 Équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

3.1 Racines carrées d'un nombre complexe non nul

Définition 6. *On appelle* **racine carrée** *d'un nombre complexe* z, *un nombre complexe dont le carré est égal à* z.

Remarque 2. *Dans le cas où le nombre est réel, cette définition est incompatible avec celle de la fonction racine carrée.*

Propriété 15. *Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.*

Démonstration. Exigible - On utilise les écritures trigonométriques. □

Exercice 12. *Déterminer les racines carrées du nombre complexe* $5 + 12i$.

3.2 Résolution des équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Théorème 2. *Étant donnés trois nombres complexes* a, b, c *avec* $a \neq 0$, *l'équation* $az^2 + bz + c = 0$ *de discriminant* $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ *admet :*

- *Si* $\Delta = 0$, *une solution complexe* $\boxed{z_0 = \dfrac{-b}{2a}}$ *de plus* $\boxed{az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2}$.
- *Si* $\Delta \neq 0$, *deux solutions complexes* $\boxed{z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}}$ et $\boxed{z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}}$ *avec* $\boxed{\delta^2 = \Delta}$

  de plus $\boxed{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)}$.

Démonstration. Exigible - On utilise la forme canonique d'un trinôme du second degré. □

Exercice 13. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2 + (1 + 6i)z - 10 = 0$.

Remarque 3. *Les solutions de l'équation précédente ne sont pas conjuguées.*

4 Nombres complexes et géométrie plane

Nous commençons par exprimer longueurs et angles au moyen des nombres complexes :

Propriété 16. *Dans le plan complexe, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls, alors* $\boxed{||\overrightarrow{u}|| = |z_{\overrightarrow{u}}|}$ *et* $\boxed{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \arg(z_{\overrightarrow{v}}) - \arg(z_{\overrightarrow{u}})\ [2\pi]}$.

Démonstration. Exigible. □

Corollaire 1. *Dans le plan complexe, on considère trois points A, B et C distincts deux à deux et d'affixes respectives z_A, z_B et z_C, alors* $\boxed{AB = |z_B - z_A|}$ *et* $\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]}$.

Démonstration. Exigible. □

Exercice 14. *Dans le plan complexe, déterminer la nature du triangle formé par les points d'affixes 1, $-2i$ et $i - 1$.*

Exercice 15. *Dans le plan complexe, on considère deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B. Interpréter géométriquement l'inégalité $|z_B - z_A| \leqslant |z_A| + |z_B|$.*

Nous pouvons définir le barycentre au moyen des nombres complexes :

Définition 7. *Dans le plan complexe, on définit le* **barycentre** *de deux points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$ avec α, β réels et $\alpha + \beta \neq 0$ comme le point G d'affixe* $\boxed{z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}}$ *où z_A et z_B sont les affixes respectives des points A et B.*

Définition 8. *Dans le plan complexe, on définit le* **barycentre** *de trois points pondérés $(A;\alpha)$,$(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$ avec α, β, γ réels et $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ comme le point G d'affixe* $\boxed{z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}}$ *où z_A, z_B et z_C sont les affixes respectives des points A, B et C.*

Exercice 16. *Dans le plan complexe, déterminer l'isobarycentre des points associés aux racines cubiques de l'unité.*

Nous pouvons également donner une écriture complexe des transformations du plan :

Propriété 17. *Dans le plan complexe, le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{u}}$ si et seulement si $z' - z = z_{\overrightarrow{u}}$.*

Démonstration. Exigible. □

Propriété 18. *Dans le plan complexe, le point M' d'affixe z' est l'image du point M d'affixe z par la rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle α si et seulement si $z' - z_\Omega = e^{i\alpha}(z - z_\Omega)$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 17. *Dans le plan complexe, déterminer la nature des transformations associées aux écritures complexes suivantes :*

$z \mapsto -\overline{z}$.
$z \mapsto z - i$.
$z \mapsto 1 + i(1 + z)$.